جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
بیست و هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۸

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
۳۰	-	۲۷۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد**. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- دایره‌ای به شعاع واحد در نظر بگیرید. مساحت این دایره به مساحت چند مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد نزدیک‌تر است؟

الف) ۶　ب) ۷　ج) ۸　د) ۹　هـ) ۱۰

۲- فرض کنید حاصل‌ضرب همه اعداد داخل جدول ضرب ۱۰ × ۱۰ برابر n باشد. بزرگ‌ترین عدد m که $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی باشد چند است؟

الف) ۲　ب) ۱۰　ج) ۱۱　د) ۲۰　هـ) ۴۰

۳- دانشمندان، منظومه‌ای در کهکشان راه شیری کشف کرده‌اند که دارای یک ستاره، ۹ سیاره و ۱۲۲ قمر است و هر سیاره آن دست‌کم یک قمر دارد. تحقیقات نشان می‌دهد که جرم ستاره برابر $۱/۹۸ \times ۱۰^{۳۰} kg$ است و مجموع جرم سیاره‌ها برابر جرم ستاره و مجموع جرم قمرهای هر سیاره برابر جرم آن سیاره است. میانگین جرم اجرام این منظومه چقدر است؟

الف) $۱/۵ \times ۱۰^{۲۸} kg$　ب) $۴/۵ \times ۱۰^{۲۸} kg$　ج) $۶/۶ \times ۱۰^{۲۸} kg$

د) $۵/۹۴ \times ۱۰^{۲۸} kg$　هـ) اطلاعات موجود کافی نیست.

۴- چهار میله به طول‌های ۵، ۳، ۷ و ۴ متر به همین ترتیب به هم لولا شده‌اند و ابتدای میله اول هم به انتهای میله چهارم لولا شده است. اگر میله‌ها بتوانند آزادانه در یک صفحه حول لولاهایشان بچرخند، فاصله لولای بین میله‌های ۵ متری و ۴ متری تا لولای مقابل چند متر می‌تواند باشد؟

الف) هر مقدار بین ۳ و ۸　ب) هر مقدار بین ۱۲ و ۱۱ متر　ج) هر مقدار بین ۲ و ۸ متر

د) هر مقدار بین ۳ و ۱۱ متر　هـ) هر مقدار بین ۲ و ۳ متر و هر مقدار بین ۸ و ۱۱ متر

۵- یک امتحان ۱۰۰ نمره‌ای از دانش‌آموزان دو کلاس الف و ب گرفته شده است. هر کلاس ۵۰ دانش‌آموز دارد. پس از اعلام نتایج، مشخص شد که میانگین نمرات کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیشتر است. حداکثر چند دانش‌آموز در کلاس ب هستند که نمره‌ی آن‌ها از همه‌ی دانش‌آموزان کلاس الف بیشتر است؟

الف) ۱　ب) ۲۵　ج) ۴۹

د) ۵۰　هـ) امکان ندارد دانش‌آموزی از کلاس ب، نمره‌اش از همه دانش‌آموزان کلاس الف بیشتر باشد

۶- مهندس ناظر تونل توحید در اولین شنبه بعد از آغاز کار از پروژه تونل توحید بازدید کرده است. از آن روز به بعد برنامه بازدید وی از تونل به این شکل بوده است: فردای همان روز، یعنی یک‌شنبه، از پروژه مجدداً بازدید کرده است و در ادامه هر بار یک روز به فاصله بین بازدیدها اضافه کرده است. صدمین بازدید در چه روزی از هفته انجام شده است؟

الف) شنبه　ب) یک‌شنبه　ج) دوشنبه　د) سه‌شنبه　هـ) چهارشنبه

۷- شخصی در اصفهان زندگی می‌کند و می‌خواهد از سه شهر تبریز، مشهد مقدس و یزد دیدن کند و به شهر اصفهان بازگردد. به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه بین این سه شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روزهای زوج موجود است. اگر این شخص سفر خود را در روز شنبه آغاز کند، به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟ (توجه کنید که این شخص به هر ترتیبی می‌تواند به این سه شهر سفر کند.)

الف) ۳۶　ب) ۷۲　ج) ۱۰۸　د) ۱۲۰　هـ) ۲۱۶

۸- چند عدد ۸ رقمی وجود دارد که حاصل‌ضرب ارقامش ۹۸۰۰ باشد؟

الف) ۱۶۸۰　ب) ۵۰۴۰　ج) ۸۴۰۰　د) ۱۰۰۸۰　هـ) ۱۲۰۹۶۰

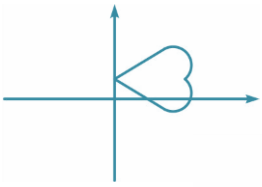
۹- فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

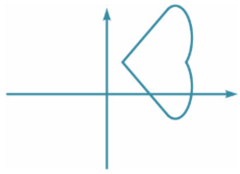
الف) دست‌کم یکی از a^3 و a^4-1 گنگ است.
ب) دست‌کم یکی از a^3-1 و a^6 گنگ است.
ج) دست‌کم یکی از a^2، a^3 و a^5 گویا است.
د) a^2 و a^3-1 گنگ هستند.
هـ) حداکثر یکی از a^3+1 و a^4 گنگ است.

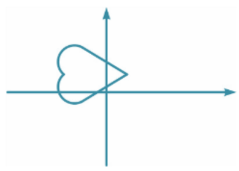
۱۰- تعداد اعداد طبیعی بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ که عامل اولی به غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد چندتاست؟

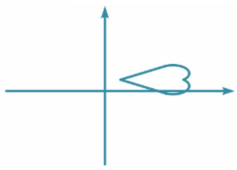
الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۴ د) ۲۰ هـ) ۸۳۳

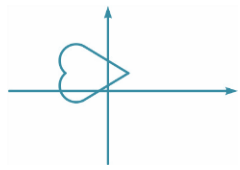
۱۱- $f(x,y)$ تابعی دو متغیره است و شکل روبه‌رو مجموعه‌ی نقاط در صفحه (x,y) است که $f(x,y)=0$. مجموعه نقاط (x,y) که $f(1-x,2y)=0$ کدام گزینه است؟

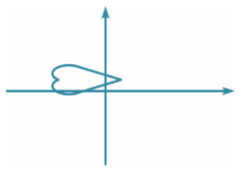


الف)


ب)


ج)


د)


هـ)


۱۲- ظرفی مکعب شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر را تا نصفه پر از آب کرده‌ایم. اگر این ظرف را به آرامی طوری کج کنیم که یک ضلع کف روی زمین باقی بماند و کف آن با زمین زاویه ۶۰ درجه بسازد، چند سانتی‌متر مکعب آب بیرون می‌ریزد؟

الف) $108-36\sqrt{3}$ ب) $216-12\sqrt{3}$ ج) $108-9\sqrt{3}$ د) $216-18\sqrt{3}$ هـ) اصلاً آبی نمی‌ریزد.

۱۳- معادله $y^3-2x^2=1388$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) بی‌نهایت

۱۴- چند عدد چهاررقمی وجود دارد که هر رقم آن از سمت چپش کوچک‌تر باشد و اگر ترتیب ارقام آن را برعکس کنیم، تفاضل این دو عدد ۶۱۷۴ می‌شود؟

الف) ۱ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۱۲ هـ) ۲۱

۱۵- فرض کنید مقدار تابع $f(x)=-x^2+bx+c$ همواره کمتر یا مساوی ۲ باشد. اگر این تابع دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، فاصله ریشه‌های آن حداکثر چقدر است؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۸ د) $\sqrt{2}$ هـ) $2\sqrt{2}$

۱۶- می‌گوییم یک عدد در مبنای a کاهشی است در صورتی که اگر آن را در مبنای a بنویسیم، هیچ رقمی از رقم سمت چپ خود بزرگ‌تر نباشد. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۲۴ وجود دارد که هم در مبنای ۲ و هم در مبنای ۴ کاهشی باشد؟

الف) ۱۰ ب) ۳۰ ج) ۳۵ د) ۴۰ هـ) ۵۵

۱۷- چند زوج مرتب (x,y) از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۱ وجود دارد که $۲x + ۷y$ بر $x + y$ بخش‌پذیر باشد؟

الف) ۵۰ ب) ۷۸ ج) ۱۰۰ د) ۱۱۶ هـ) ۲۰۰

۱۸- ضلع AB، از مثلث ABC را از طرف B به اندازه‌ی خودش تا P ادامه می‌دهیم. ضلع AC را هم از طرف C به اندازه دو برابر خودش تا نقطه‌ی Q امتداد می دهیم. اگر M وسط PQ باشد، مساحت مثلث MBC چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

الف) ۱ ب) ۱/۲۵ ج) ۱/۵ د) ۱/۷۵ هـ) ۲

۱۹- می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰ را، بدون تکرار، در جدول زیر بنویسیم به طوری که هر عدد هم از عدد سمت راستش و هم از عدد پایینش کوچک‌تر باشد. این کار به چند طریق ممکن است؟

الف) ۳۴ ب) ۳۵ ج) ۳۶ د) ۴۴ هـ) ۴۵

۲۰- فرض کنید عدد طبیعی n روی تخته سیاه نوشته شده است. این عدد را پاک می‌کنیم و به جای آن عدد $n + ۲^b - ۲^a$ را می‌نویسیم که در آن a بزرگ‌ترین عددی است که n به ۲^a بخش‌پذیر است و b کوچک‌ترین عددی است که $n < ۲^b$. اگر در ابتدا عدد ۴۲ نوشته شده باشد بعد از ۱۱۳ بار انجام این کار چه عددی روی تخته خواهد بود؟

الف) ۷×۲^{۱۱۶} ب) $۲^{۱۱۷} - ۱۸۴$ ج) ۹×۲^{۱۱۷} د) $۲^{۱۱۳} + ۴۲$ هـ) $۲^{۱۱۸} - ۱۸۴$

۲۱- فرض کنید ABC یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشد که AB وتر آن است. مورچه‌ای داخل مثلث است وی ابتدا به سمت نقطه A می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود. سپس به سمت نقطه B می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود و این دو حرکت را متناوباً تکرار می‌کند. بعد از ۲۰ مرحله انجام این کار مورچه به کدام نقطه نزدیک‌تر است؟

الف) A ب) B ج) C د) وسط وتر AB هـ) بستگی به مکان اولیه مورچه دارد.

۲۲- در یک ستون ۲۵۷ سرباز ایستاده‌اند. فرمانده دستور می‌دهد که نفراتی که در مکان‌های فرد قرار گرفته‌اند بـه همـان ترتیب از صف خارج شوند، نفرات دیگر با حفظ ترتیب جای آن‌ها را پر کنند و در نهایت نفرات از صف خارج شده به همان ترتیب به انتهای صف بروند. اگر فرمانده ۴۱ مرتبه‌ی دیگر این دستور را تکرار کند سربازی که در نهایت نفر اول صف شده در ابتدا نفر چندم بوده است؟

الف) ۱ ب) ۱۶ ج) ۱۲۸ د) ۲۵۳ هـ) ۲۵۵

۲۳- به چند صورت می‌توان یک چندجمله‌ای از درجه‌ی پنج ساخت که ضرایب آن، با ترتیبی دل‌خواه، اعداد ۱، ۲، ۳ و... ۶ باشد و به علاوه به چند جمله‌ای $۱ + x + x^۲$ بخش‌پذیر باشد؟ (بخش‌پذیر بودن یک چندجمله‌ای به چندجمله‌ای $۱ + x + x^۲$ یعنی آن را بتوان به صورت ضرب چند جمله‌ای $۱ + x + x^۲$ و یک چندجمله‌ای دیگر نوشت.)

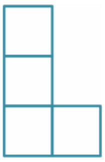
الف) ۱ ب) ۴۸ ج) ۱۲۰ د) ۳۶۰ هـ) چنین چندجمله‌ای وجود ندارد.

۲۴- بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت a با شرط $a - \frac{۱}{a} \ge ۱$، داشته باشیم $a^۳ - \frac{۱}{a^۳} \ge k(a - \frac{۱}{a})$.

الف) ۲ ب) $\sqrt{۳}$ ج) ۴ د) $۴\sqrt{۳}$ هـ) ۵

۲۵- توپی به شعاع ۲۰ سانتی‌متر روی سطح زمین قرار دارد. بالاترین نقطه توپ را علامت می‌زنیم. پس از آن توپ را به اندازه ۲۵π سانتی‌متر به سمت شرق و سپس به اندازه ۲۵π سانتی‌متر به سمت شمال می‌غلطانیم. در نهایت ارتفاع علامت از سطح زمین چند سانتی‌متر است؟

الف) $۲۰ - ۱۰\sqrt{۲}$ ب) ۲۰ ج) $۲۰ + ۵\sqrt{۲}$ د) $۲۰ + ۱۰\sqrt{۲}$ هـ) ۳۰



۲۶- به چند طریق می‌توان جدول ۱۳۸۸×۱۳۸۸ را با اعداد ۱ تا ۶ پر کرد. به طوری که اگر کاشی به شکل روبه‌رو را بر روی چهار خانه از جدول قرار دهیم. مجموع ۴ عدد زیر کاشی مضربی از ۶ باشد؟ (کاشی را می‌توان چرخاند یا پشت و رو کرد.)

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ هـ) ۲۰

۲۷- کدام گزینه درباره سه عدد زیر صحیح است؟ در عبارتی که برابر A است ۵۰۰ بار ۲ و ۵۰۰ بار ۴ ظاهر شده است و در عبارتی که برابر B است نیز همین طور است. در عبارتی که برابر C است ۲۰۰۰ بار ۲ ظاهر شده است؟

$$C^{۲^{۳^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}}} \quad , B = ۴^{۲^{۴^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}}} \quad , A = ۲^{۴^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۴}}}}}}$$

الف) $A > B > C$ ب) $B > A > C$ ج) $C > A > B$

د) $C > B > A$ هـ) $B > C > A$

۲۸- در چهارضلعی محدب $ABCD$، $D\widehat{A}B = ۱۱۰^\circ$، $B\widehat{C}D = ۱۲۵^\circ$ و $AB = AD = ۶$. طول قطر AC چقدر است؟

الف) ۵ ب) ۵/۵ ج) ۶ د) ۶/۵ هـ) اطلاعات کافی نیست.

۲۹- یک جورچین (پازل) ساده از ۱۰ قطعه مربعی شکل تشکیل شده است که باید در یک ردیف در کنار هم قرار بگیرند تا تصویری مشخص را درست کنند. فرض کنید مکان‌های سوم و هشتم به درستی پر شده است و از این به بعد در هر مرحله تنها مجازیم قطعه‌ای را سرجایش قرار دهیم که دست‌کم یکی از قطعات مجاورش قبلاً جای‌گذاری شده باشد. به چند روش مختلف می‌توان ۸ قطعه باقی‌مانده را سرجایش گذاشت؟

الف) ۱۶۸۰ ب) ۳۳۶۰ ج) ۴۲۰۰ د) ۵۰۴۰ هـ) ۱۰۰۸۰

۳۰- حداکثر چند دایره در فضا می‌توان قرار داد به طوری که هر دو تا هم‌دیگر را در دو نقطه قطع کنند، هیچ سه تایی از یک نقطه عبور نکنند و هیچ دوتایی در یک صفحه قرار نداشته باشند؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۶ د) ۱۲ هـ) بی‌نهایت

کلید سوالات

سوال	پاسخ	سوال	پاسخ	سوال	پاسخ
۱	ب	۲۱	د	۴۱	
۲	هـ	۲۲	د	۴۲	
۳	ب	۲۳	ب	۴۳	
۴	الف	۲۴	ج	۴۴	
۵	ج	۲۵	هـ	۴۵	
۶	ب	۲۶	ج	۴۶	
۷	هـ	۲۷	ج	۴۷	
۸	ج	۲۸	ج	۴۸	
۹	الف	۲۹	ب	۴۹	
۱۰	ب	۳۰	هـ	۵۰	
۱۱	هـ	۳۱		۵۱	
۱۲	الف	۳۲		۵۲	
۱۳	الف	۳۳		۵۳	
۱۴	د	۳۴		۵۴	
۱۵	هـ	۳۵		۵۵	
۱۶	ج	۳۶		۵۶	
۱۷	د	۳۷		۵۷	
۱۸	ج	۳۸		۵۸	
۱۹	ب	۳۹		۵۹	
۲۰	الف	۴۰		۶۰	

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۸

۱- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

داریم که:

$\frac{\sqrt{۳}}{۴}=$ مساحت مثلث به ضلع واحد و $\pi =$ مساحت دایره به شعاع واحد

بنابراین می‌خواهیم nای را بیابیم که $\left|\pi - n\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right|$ کمینه باشد یا معادل آن $\left|\frac{۴\pi}{\sqrt{۳}} - n\right|$ کمینه باشد.

داریم که:

$$\pi \cong ۳/۱,\sqrt{۳} \cong ۱/۷ \Rightarrow \frac{۴\pi}{\sqrt{۳}} \cong ۷/۳$$

پس n برابر ۷ است.

۲- **گزینه‌ی [د] صحیح است.**

ابتدا حاصل‌ضرب اعداد جدول ضرب ۱۰ در ۱۰ را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید حاصلضرب اعداد سطر i ام برابر است با $۱۰!\times i^{۱۰}$. در نتیجه حاصل‌ضرب کل اعداد جدول برابر است با: $(۱۰!)^{۲۰}$. اکنون می‌خواهیم ببینیم بزرگترین m طبیعی که به ازای آن $\sqrt[m]{(۱۰!)^{۲۰}}$ صحیح است چیست. توجه کنید برای اینکه این امر محقق شود باید توان همه‌ی عوامل اول $(۱۰!)^{۲۰}$ بر عدد m بخش‌پذیر باشد. در نتیجه بزرگترین عدد طبیعی m با این خاصیت برابر با ب.م.م توان عوامل اول در $(۱۰!)^{۲۰}$ است. درنتیجه با توجه به اینکه:

$$(۱۰!)^{۲۰} = ۲^{۱۶۰}\times ۳^{۸۰}\times ۵^{۴۰}\times ۷^{۲۰}$$

در نتیجه بزرگترین m با خاصیت مذکور برابر است با: $(۱۶۰,۸۰,۴۰,۲۰) = ۲۰$.

۳- **گزینه [ب] صحیح است.**

با توجه به این که هر سیاره لااقل یک قمر دارد، می‌توان گفت که مجموع جرم اقمار این منظومه با مجموع جرم سیارات این منظومه برابر است. از طرفی همان‌طور که گفتیم مجموع جرم سیارات برابر با مجموع جرم ستاره این منظومه است. پس در نتیجه می‌توان گفت که مجموع جرم اجرام این منظومه برابر با ۳ برابر جرم ستاره است. حال با توجه به این که ۱۳۲ جرم در این منظومه قرار دارد، می‌توان گفت که

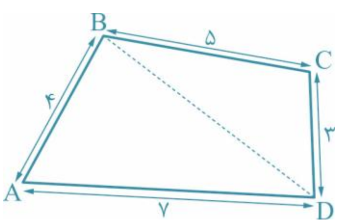
$$\text{میانگین جرم} = \frac{۳\times ۱/۹۸\times ۱۰^{۳۰}}{۱۳۲} = ۴/۵\times ۱۰^{۲۸}$$

۴- **گزینه [الف] صحیح است.**

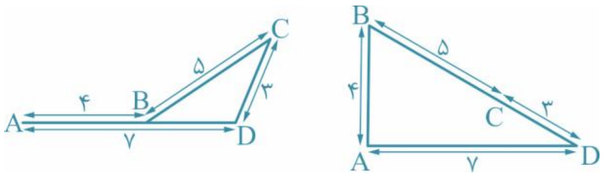
مطابق شکل:

داریم که طبق نامساوی مثلث $BA + BD \geq AD$ پس $۴ + BD \geq ۷$ یا $BD \geq ۳$

همچنین داریم که $BC + CD \geq BD$ پس $۸ \geq BD$



پس داریم که $۳ \geq BD \geq ۸$ و به سادگی می‌توانید تحقیق کنید که هر مقداری این میان را اتخاذ می‌کند.



۵- گزینه [ج] صحیح است.

با توجه به این که نمره نفر اول کلاس الف بیشتر یا مساوی میانگین نمرات این کلاس است و این میانگین از میانگین کلاس ب بیشتر است، می‌توان گفت که نمره نفر اول کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیشتر است. در نتیجه ممکن نیست که کسی در کلاس ب نباشد که نمره‌اش از نفر اول کلاس الف کمتر باشد. در نتیجه حداکثر ۴۹ نفر در کلاس ب هستند که از تمامی افراد کلاس الف بیشتر است.

حال کافی است که برای ۴۹ نیز مثالی ذکر کنیم. فرض کنید ۴۹ نفر در کلاس ب نمره ۱۰۰ کسب کردند و یکی صفر شده باشد. در کلاس الف نیز همگی نمره ۹۹ را کسب کرده باشند. در نتیجه

$$\frac{۱۰۰ \times ۴۹}{۵۰} < \frac{۵۰ \times ۹۹}{۵۰}$$

در این حالت به وضوح ۴۹ نفر در کلاس ب نمره‌شان از تمامی افراد کلاس الف بیشتر شده است.

۶- گزینه [ب] صحیح است.

شنبه‌ای که مهندس ناظر برای اولین بار از تونل بازدید کرده را روز صفر بنامید. پس مطابق زیر برنامه بازدیدها را می‌نویسیم:

اولین روز بازدید	روز ۰
دومین بازدید	روز ۰+۱
سومین بازدید	روز ۰+۱+۲
چهارمین	روز ۰+۱+۲+۳
.	.
.	.
.	.
صدمین بازدید	روز ۰+۱+...+۹۸+۹۹

پس صدمین بازدید در روز $۴۹۵۰ = \frac{۹۹ \times ۱۰۰}{۲} = ۹۹ + ... + ۲ + ۱ + ۰$ انجام می‌شود داریم که باقی‌مانده ۴۹۵۰ بر ۷ برابر ۱ است لذا این بازدید در یک روز بعد از شنبه یعنی یک‌شنبه صورت می‌گیرد.

۷- گزینه [هـ] صحیح است.

این فرد در روز اول به یکی از ۳ شهر تبریز، مشهد مقدس یا شیراز سفر می‌کند. پس مسیر مسافرتش در روز اول به سه طریق مشخص می‌شود. این مسافرت نیز به وسیله هواپیما، قطار یا اتوبوس صورت گیرد. پس به ۳ طریق می‌تواند وسیله مورد نظرش را انتخاب کند. در روز دوم با دو وسیله می‌تواند مسافرت کند و از شهر اول به یکی از دو شهر باقی‌مانده‌می‌تواند سفر کند. در روز سوم با سه وسیله به شهر باقی‌مانده سفر می‌کند. در روز چهارم نیز با دو وسیله می‌تواند به اصفهان بازگردد. در نتیجه تعداد راه‌های مسافرت او بنابر اصل ضرب برابر است با:

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۲۱۶$$

۸- **گزینه [ج] صحیح است.**

با تجزیه ۹۸۰۰ به عوامل اول خواهید یافت که $۹۸۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲ \times ۷^۲$. در نتیجه با توجه به این که ارقام از ۰ تا ۹ هستند، لزوماً از هر کدام از ۵ و ۷ دو مرتبه استفاده می‌شود. حال برای ایجاد عامل $۲^۳$ سه راه وجود دارد:

الف) از یک ۸ استفاده کنیم و در نتیجه باید برای بقیه ارقام از ۱ استفاده شود. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می‌توان جایگاه ۷ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می‌توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و در آخر به ۴ طریق می‌توان جایگاه ۸ را مشخص کرد. پس در این حالت ۱۶۸۰ عدد ۸ رقمی داریم.

ب) از یک ۴ استفاده کنیم و یک ۲. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می‌توان جایگاه ۷ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می‌توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و به ۴ طریق و به ۳ طریق جایگاه ۲ را مشخص می‌کنیم. پس در این حالت ۵۰۴۰ عدد ۸ رقمی داریم.

ج) از ۳ عدد ۲ استفاده می‌کنیم. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می‌توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می‌توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توان جایگاه ۲ها را مشخص کرد. پس در این حالت ۱۶۸۰ عدد ۸ رقمی داریم.

در نتیجه در کل ۸۴۰۰ عدد ۸ رقمی با این خاصیت وجود دارد.

۹- **گزینه [الف] صحیح است.**

ابتدا ثابت می‌کنیم الف همواره درست است. فرض کنید a گنگ باشد ولی $a^۳$ و $a^۴ - ۱$ گویا باشند. در این صورت $a^۴$ هم گویا است.

علاوه بر آن $a = \frac{a^۴}{a^۳}$ و $a^۳ \neq ۰$. در نتیجه تقسیم دو عبارت گویا برابر با عبارتی گنگ شده در حالی که می‌دانیم حاصل تقسیم دو عدد گویا عددی گویاست. این تناقض است.

راه‌حل دیگری هم برای اثبات مسئله وجود دارد و آن ارائه مثال نقض برای بقیه گزینه‌هاست.

برای ب کافی است $a = \sqrt[۳]{۲}$ را در نظر بگیرید.

برای ج کافی است $a = \sqrt[۳۰]{۲}$ را در نظر بگیرید.

برای د کافی است $a = \sqrt{۲}$ را در نظر بگیرید.

برای هـ کافی است $a = \sqrt[۵]{۲}$ را در نظر بگیرید.

پس گزینه الف صحیح است.

۱۰- **گزینه [ب] صحیح است.**

توجه کنید سوال به دنبال تعداد اعداد به فرم $۲^m \times ۳^n$ ای می‌گردد. که بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ قرار دارند و نه خود اعداد. توجه کنید که برای هر n حداکثر یک m به دست می‌آید که $۵۰۰۰ < ۲^m \times ۳^n < ۱۰۰۰۰$ (اگر دو m به دست آید یعنی اینکه یک عدد و دوبرابرش در بازه $(۵۰۰۰,۱۰۰۰۰)$ قرار گرفته‌اند که این امکان ندارد). علاوه بر این می‌خواهیم نشان دهیم برای هر n صحیح و نامنفی که $۳^n < ۱۰۰۰۰$ باشد m ای پیدا می‌شود که $۵۰۰۰ < ۲^m \times ۳^n < ۱۰۰۰۰$. برای این کار ابتدا $m = ۰$ را در نظر می‌گیریم. اگر عدد ۳^n از ۵۰۰۰ بیش‌تر باشد که چیزی که می‌خواستیم یافته‌ایم در غیر این‌صورت $m = ۱$ در نظر گرفته می‌شود. اکنون دقت کنید که امکان ندارد که $۲ \times ۳^n > ۱۰۰۰۰$ زیرا در این‌صورت ۳^n بزرگتر از ۵۰۰۰ وده که می‌دانیم این‌گونه نبوده است. در نتیجه $۲ \times ۳^n < ۱۰۰۰۰$ و اگر این عدد

از ۵۰۰۰ بیش‌تر باشد مسئله حل است. در غیر این‌صورت $m = 2$ را در نظر می‌گیریم و روند فوق را ادامه می‌دهیم. توجه کنید که این روند متوقف می‌شود زیرا به جایی می‌رسیم که $2^u \times 3^u \geq 2^u > 10000$. وقتی روند متوقف شد m را یافته‌ایم و این m هم یکتاست. در حقیقت ما ابتدا یک عدد کوچکتر از ۱۰۰۰۰ در نظر می‌گیریم و درهر مرحله آن را دو برابر می‌کنیم. این روند را آن قدر ادامه می‌دهیم تا اولین مرحله‌ای که از ۱۰۰۰۰ بیش‌تر شویم. اگر مرحله‌ی قبل از این مرحله را در نظر بگیریم حتماً عددمان در این مرحله چیزی بین ۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ بوده است.

در نتیجه جواب مسئله برابر است با تعداد اعداد صحیح و نامنفی m که $3^m < 10000$ که با یک بررسی ساده می‌بینیم که ۹ عدد m در رابطه بالا صدق می‌کنند یعنی اعداد صحیح از ۰ تا ۸. پس گزینه ب صحیح است.

۱۱- **گزینه [هـ] صحیح است.**

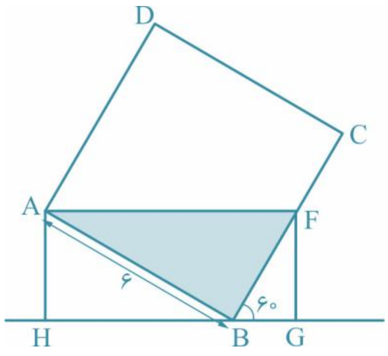
فرض کنید که $1 - x = u$ و $2y = v$ باشند در این صورت $f(u,v) = 0$ درنتیجه مجموعه جوابی که برای u,v به دست می‌آید همان شکلی است که در فرض مسئله داده شده است. اکنون

$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = \dfrac{v}{2} \end{cases}$$

در نتیجه برای به دست آوردن مجموعه نقاط خواسته شده باید ابتدا نموداری که در مسئله داده شده است را نسبت به محور yها قرینه کنیم. سپس یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. در پایان هم باید با یک تجانس به نسبت $\frac{1}{2}$ مختص دوم همه‌ی نقاط را نصف کنیم (به نوعی نمودار را جمع کنیم). اگر این کارها را انجام دهیم به سادگی معلوم است که گزینه (هـ) جواب مسئله است.

۱۲- **گزینه [الف] صحیح است.**

ابتدا $108 = 3 \times 6 \times 6$ سانتی‌متر مکعب آب درون مکعب قرار دارد. شکل زیر نمای کناری مکعب بعد از کج شدن است:



$$FG = AH = 6SIN(30\square) = 3, GH = BH + BG = AH.\cot(30\square) + FG.\tan(30\square)$$
$$= 3(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}) = 4\sqrt{3}$$

پس حجم آب باقی مانده برابر است با:

$$6 \times (\text{مساحت مثلث ABF}) = 6 \times \frac{3 \times 4\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

داریم که $108 > 36\sqrt{3}$ پس آب بیرون می‌ریزد و حجم آب بیرون ریخته شده برابر $108 - 36\sqrt{3}$ است.

-۱۳ گزینه [الف] صحیح است.

توجه کنید که ۱۳۸۸ بر ۴ بخش‌پذیر است اما بر ۸ بخش‌پذیر نیست. طبقه معادله $y^۳ = ۲x^۲ + ۱۳۸۸$، نتیجه می‌گیریم $y^۳$ زوج است. پس y نیز زوج است. در نتیجه $y^۳$ بر ۸ بخش‌پذیر است. حال عبارت $y^۳ - ۱۳۸۸$ بر ۴ بخش‌پذیر است. در نتیجه لزوماً $x^۲$ زوج است. پس x نیز زوج است و $۲x^۲$ بر ۸ بخش‌پذیر است. در نتیجه $y^۳ - ۲x^۲$ نیز بر ۸ بخش‌پذیر است که این گونه نیست. زیرا ۱۳۸۸ بر ۸ بخش‌پذیر نیست.

-۱۴ گزینه [د] صحیح است.

راه اول:

فرض کنید $\overline{abcd}$ عددی چهار رقمی با این خاصیت باشد. به راحتی می‌توان دید که

$$\begin{aligned}\overline{abcd} - \overline{dcba} &= ۹۹۹a + ۹۰b - ۹۰c - ۹۹۹d = ۹(۱۱۱(a-d) + ۱۰(\mathrm{b}-\mathrm{c}))\\ &= ۶۱۷۴\\ &\Rightarrow ۱۱۱(\mathrm{a}-d) + ۱۰(\mathrm{b}-\mathrm{c}) = ۶۸۶\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$۶۸۶ \equiv ۱۱۱(a-d)(\mathrm{mod}\,۱۰) \Rightarrow ۶ \equiv a-d(\mathrm{mod}\,۱۰)$$

پس با توجه به این که a>d لزوماً $a > d$ لزوماً $a-d=۶$ و بنابر رابطه فوق لزوماً $b-c=۲$.

پس با توجه به این تساوی‌ها می‌توان گفت $۰ \leq d \leq ۳$ و $d < c < ۴+d$ (چرا؟) پس کلاً ۴ انتخاب برای d و ۳ انتخاب متناظر با آن برای c داریم. همچنین a و b به صورت یکتا با توجه به آن دو مشخص می‌گردند. در نتیجه به ۱۲ حالت می‌توان اعداد مطلوب را تولید کرد.

راه دوم:

داریم که

$$a > b > c > d$$

و

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = ۶۱۷۴$$

حال شروط برقراری رابطه بالا را بررسی می‌کنیم. اولاً چون a>d پس در محاسبه رقم یکان حاصل عبارت ده بر یک صورت می‌گیرد پس $۱۰ + d - a = ۴$ پس $a-d=۶$ همین طور در این مرحله یکی از رقم c که بزرگتر صف نیز هست کم می‌شود. پس هنوز داریم که $۰ \leq c-۱ < b$ پس اینجا نیز باید ده بر یک بکنیم و داریم که

$۱۰ + (c-۱) - b = ۷$ پس داریم که $b-c=۲$ در این مرحله نیز یکی از b کم می‌شود ولی باز هم داریم که $b-۱ \geq c$ پس $b-۱-c=۱$ یا $b-c=۲$ در نهایت هم داریم که برای محاسبه رقم چهارم باید a را منهای d کنیم که نتیجه می‌شود $a-d=۶$ پس دو شرط $a-d=۶$ و $b-c=۲$ لازم و کافی هستند.

با توجه به شراط اول به سادگی به دست می‌آید که برای انتخاب a و d تنها ۴ حالت وجود دارد و با داشتن a و d برای انتخاب b و c تنها ۳ حالت وجود دارد. پس در کل $۱۲ = ۴ \times ۳$ حالت برای انتخاب $\overline{abcd}$ وجود دارد.

-۱۵ گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

توجه کنید f یک سهمی است که ضریب درجه دوم آن منفی است پس ماکسیمم دارد. همچنین ماکسیمم آن به ازای $x = -\frac{b}{۲a} = \frac{b}{۲}$ رخ می‌دهد. از آن جایی که این مقادیر سهمی باید همواره کمتر از یا مساوی ۲ باشند پس ماکسیمم آن از ۲ نابیشتر است. پس

$$f(\frac{b}{۲}) \leq ۲ \Rightarrow -(\frac{b}{۲}) + b(\frac{b}{۲}) + c \leq ۲ \Rightarrow b^۲ + ۴c \leq ۸$$

اکنون می‌دانیم که فاصله‌ی ریشه‌ها برابر است با:

$$s=\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{-۲}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{-۲}\right|=\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^{۲}+۴c}\leq\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

در نتیجه کافی است مثالی ارائه دهیم. توجه کنید هر دو عدد حقیقی b,c که برای آن‌ها $b^{۲}+۴c=۸$ جواب هستند و مثال مورد نظر را می‌توانید بسازید. پس گزینه (هـ) صحیح است.

۱۶- ماخ **گزینه‌ی [ج] صحیح است.**

توجه کنید از آنجایی که عدد در مبنای ۲ فقط از ۰ و ۱ تشکیل شده است در نتیجه یک عدددر این مبنا کاهشی است اگر به فرم ۰۰۰...۱۰۰...۱۱۱۱ باشد که در این عدد m بار ۱وn بار صفر استفاده شده است. از آنجایی که ما فقط اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۲۴ را بررسی می‌کنیم پس اعدادی را بررسی می‌کنیم که برای آن‌ها $m+n\leq۱۰, m\geq۱$. اکنون می‌خواهیم ببینیم چه تعدادی از این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند. توجه کنید برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۴ از راست شروع می‌کنیم و به جای ۰۰و۰۱و۱۰و۱۱ به ترتیب ۰،۱،۲،۳ قرار می‌دهیم. اگر تعداد ارقام در مبنای ۲ فرد بود در پایان یک عدد باقی می‌ماند که حتماً ۱ است یا معادلا ۰۱ است که به جای آن ۱ قرار می‌دهیم. در نتیجه اعداد بالا را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ زوج است: توجه کنید همه‌ی این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند(در واقع اگر دوتا دوتا تقسیم کنید و به فرم این اعداد در مبنای ۲ توجه کنید کاملا مشخص است). فرض کنید بخواهیم تعداد اعضای طبیعی ۲k رقمی بر مبنای ۲ که به فرم ...۰۱۰۰...۱۱ هستند را بشماریم. توجه کنید تعداد صفرها در این اعداد می‌تواند عددی بین ۰ تا $۲k-۱$ باشد و با تعداد صفرها عدد یکتا معلوم می‌شود. پس دقیقاً ۲k تا از این اعداد داریم. در نتیجه تعداد اعداد در این قسمت دقیقاً برابر است با: $۲+۴+۶+۸+۱۰=۳۰$
- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ فرد است: اگر به مطالبی که در بالا توضیح داده شد دقت کنید می‌بینید که چپ ترین رقم این ا عداد در مبنای ۴ حتماًاست. در نتیجه رقم‌های دیگر این عدد همگی باید ۰ تا ۱ باشند(در مبنای ۴). اما هیچکدام از این ارقام نمی‌توانند ۱ باشند در واقع اگر بخواهد رقمی در مبنای ۴ غیر از این چپ‌ترین ۱،۱ باشد پس این عدد به فرم ...۰۱۰۰...۱۱ در مبنای ۴ است که در آن تعداد ۱ها حداقل ۲ است و این به این معناست که این عدد در مبنای ۲ به فرم: ...۰۱۰۰۰...۱۰۱۰۱۰۱۰ است که از آنجایی که تعداد۱ها در مبنای ۴ حداقل ۲تاست پس در مبنای ۲ هم حداقل یک عبارت ۱۰۱ داریم و این با فرم اولیه‌ی این اعداد متناقض است. درنتیجه در بین اعدادی که در مبنای ۲ فرد رقم دارند و به فرم ...۰۱۰۰...۱۱ هستند فقط اعدادی می‌توانند مناسب باشند که دقیقا یک عدد ۱ در نمایششان داشته باشند. علاوه بر این همه‌ی این اعداد هم مناسب هستند. در نتیجه از آنجایی که تعداد ارقام این اعداد حداکثر ۱۰ است پس دقیقا ۵ تا از این اعداد داریم(۱رقمی، ۳ رقمی، ۵ رقمی، ۷ رقمی و ۹ رقمی در مبنای ۲ و از هرکدام دقیقاً یکی).

در نتیجه در کل دقیقاً ۳۵=۵+۳۰ تا از این اعداد کاهشی در هر دو مبنا داریم و گزینه‌ج صحیح است.

۱۷- ماخ **گزینه‌ی [د] صحیح است.**

فرض کنید $(x,y)=d$(یعنی d ب.م.م دو عدد x و y باشد) و $x=dx'$ و $y=dy'$. در نتیجه:

$$x+y\,\big|\,۲x+۷y\Rightarrow d(x'+y')\,\big|\,d(۲x'+۷y')\Rightarrow x'+y'\,\big|\,۲x'+۷y'$$

$$\Rightarrow x'+y'\,\big|\,۵y'\Rightarrow x'+y'\,\big|\,۵\Rightarrow x'+y'=۵$$

توجه کنید که $y',x',(x',y')=۱\Rightarrow(y',x'+y')=۱$ هر دو طبیعی هستند. در نتیجه روابط خط آخر عبارت فوق صحیح هستند. از طرفی می‌توان بررسی کرد که هر دو عدد طبیعی که دارای شرط فوق باشند(یعنی $(x+y=۵(x,y))$) در شرط مسئله صدق می‌کنند. پس کافی است تنها تعداد (x,y) را بشماریم که در شرط فوق صدق کنند و هر دو از ۱۰۱ کمتر باشند. پس ۴ حالت ممکن است:

الف- $x'=۴,y'=۱\Rightarrow dx'=x<۱۰۱\Rightarrow ۱\leq d\leq ۲۵$

پس به ۲۵ طریق می‌توان d را انتخاب کرد.

ب- $x'=۳, y'=۲ \Rightarrow dx'=x<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d \le ۳۳$

پس به ۳۳ طریق می‌توان d را انتخاب کرد.

ج- $x'=۱, y'=۴ \Rightarrow dy'=y<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d \le ۲۵$

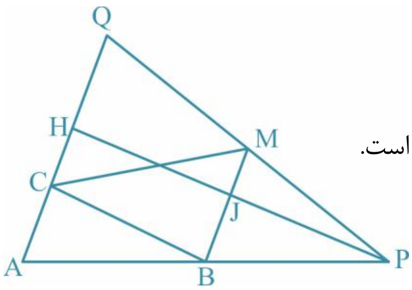
پس به ۲۵ طریق می‌توان d را انتخاب کرد.

ب- $x'=۲, y'=۳ \Rightarrow dy'=y<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d \le ۳۳$

پس به ۳۳ طریق می‌توان d را انتخاب کرد.

در کل جواب برابر است با۱۱۶=۳۳+۲۵+۳۳+۲۵.

۳۰- **گزینه (ج) صحیح است.**



منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است.

داریم که با توجه به شرایط مساله $MB\|AQ$ و همچنین فرض کنید PH بر AQ و BM عمود است.

داریم که:

$$MB=\frac{۱}{۲}AQ, \frac{۱}{۲}PH=HJ \Rightarrow \frac{S_{MBC}}{S_{APQ}}=\frac{HJ.BM}{PH.AQ}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{MBC}=\frac{۱}{۴}S_{APQ}$$

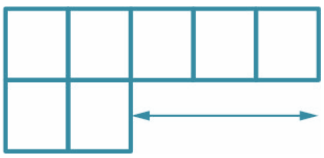
همچنین داریم که:

$$S_{ABC}=\frac{AC}{AQ}S_{AQB}=\frac{AC}{AQ}\frac{AB}{AP}S_{APQ} \Rightarrow S_{APQ}=۶S_{ABC}$$

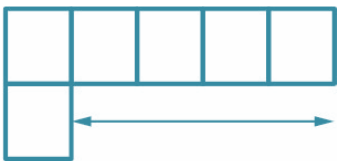
پس:

$$S_{MBC}=\frac{۱}{۴}S_{APQ}=\frac{۳}{۲}S_{ABC}$$

۱۹- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**



فرض کنید تعداد حالاتی که می‌توان اعداد ۱ تا $n\,(n\ge ۴)$ را در یک جدول مشابه شکل زیر چید (به طوری که اعداد در دو سطر و در دو ستون از کوچک به بزرگ چیده شده باشند) برابر باشد با b_n.



به راحتی بررسی می‌توان کرد که در شکلی مشابه زیر به $m-۱$ طریق می‌توان اعداد ۱ تا m را جاسازی کرد(به طوری که اعداد در سطر و ستون به صورت صعودی چیده شده باشند).

حال به وضوح عدد n را در جدول فوق به دو صورت می‌توان جاسازی کرد(انتهای سطر اول و انتهای سطر دوم). حال در حالت اول بقیه جدول را می‌توان به $b_{n-۱}$ طریق اعداد را جایسازی کرد و در حالت دوم $n-۲$ طریق. می‌توان نتیجه گرفت که $b_n=b_{n-۱}+n-۲$. حال با توجه به این که $b_۴=۲$، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} b_n &= b_۴+۳+۴+\ldots+(n-۲)=۲+۳+\ldots+(n-۲) \\ &= \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}-۱ \end{aligned}$$

پس $b_{۱۰}=۳۵$.

۲۰- گزینه [الف] صحیح است.

ابتدا عدد n را در مبنای ۲ می‌نویسیم و این عملیات را بررسی می‌کنیم.

نشان می‌دهیم که عملیات فوق اولین رقم ناصفر عدد در مبنای دو را ۰ می‌کند و یک ۱ به انتهای آن اضافه می‌کند.

چرا که بزرگ‌ترین ۲^aای که $۲^a | n$ همان ضریب اولین ۱ در نمایش مبنای ۲ عدد n است و کوچک‌ترین ۲^b که $۲^b < n$ همان ضریب رقمی است که بعد از آخرین یک عدد n در بسط مبنای ۲ ظاهر می‌شود:

$$n = (۰۱a_۱a_۲...a_{u-۱}a_u۱۰۰...۰)_۲$$
$$۲^a = (۰۰۰۰۰۰۰۰...۰۰۰۱۰۰...۰)_۲$$
$$۲^b = (۱۰۰۰۰۰...۰۰۰۰۰۰۰۰۰...۰)_۲$$
$$n + ۲^b - ۲^a = (۱۱a_۱a_۲...a_{u-۱}a_u۰۰۰...۰)_۲$$

بنابراین با این الگو از ۴۲ شروع می‌کنیم و داریم که $۴۲ = (۱۰۱۰۱۰)_۲$:

مرحله ۰ $(۱۰۱۰۱۰)_۲$

مرحله ۱ $(۱۱۰۱۰۰۰)_۲$

مرحله ۲ $(۱۱۱۰۰۰۰۰)_۲$

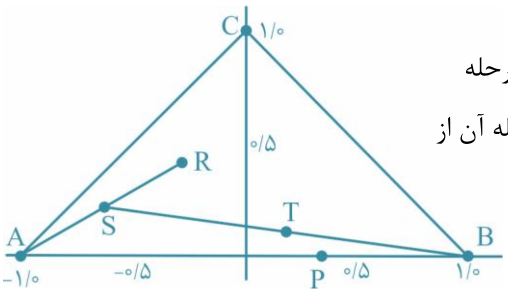
مرحله ۳ $(۱۱۱۰۰۰۰۰۰)_۲$

مرحله ۴ $(۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰)_۲$

همان‌طور که مشاهده می‌شود از مرحله ۲ به بعد هر بار عدد فوق دو برابر می‌شود. در مرحله ۲ برابر است با $۲^۷ + ۲^۶ + ۲^۵$

لذا در مرحله ۱۱۳ یعنی ۱۱۱ مرحله بعد به عدد $۲^{۱۱۸} + ۲^{۱۱۷} + ۲^{۱۱۶}$ یا ۷×۲^{۱۱۶} می‌رسیم.

۲۱- گزینه [د] صحیح است.



نشان می‌دهیم که در هر دو مرحله (یعنی یک مرحله با شماره زوج و بعد یک مرحله با شماره فرد) فاصله مورچه تا نقطه P روی خط AB که فاصله P تا نقطه B نصف فاصله آن از A است یک چهارم می‌شود. این نکته را به ۲ راه نشان می‌دهیم:

راه اول:

مطابق شکل مثلث را روی محور مختصات قرار دهید:

اگر مورچه ابتدا در نقطه $(x_{۲k}, y_{۲k})$ قرار داشته باشد بعد از یک مرحله به نقطه $(x_{۲k+۱}, y_{۲k+۱}) = (\frac{x_{۲k} - ۱}{۲}, \frac{y_{۲k}}{۲})$ می‌رود و سپس به نقطه

$(x_{۲k+۱}, y_{۲k+۱}) = (\frac{x_{۲k+۱} + ۱}{۲}, \frac{y_{۲k+۱}}{۲}) = (\frac{(\frac{x_{۲k} - ۱}{۲}) + ۱}{۲}, \frac{y_{۲k}}{۲}) = (\frac{x_{۲k} + ۱}{۴}, \frac{y_{۲k}}{۴})$ می‌رود، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$(x_{۲k+۲} - \frac{۱}{۳}, y_{۲k+۲}) = (\frac{۱}{۴}(x_{۲k} - \frac{۱}{۳}), \frac{۱}{۴}(y_{۲k}))$$

پس فاصله مورچه در مرحله $۲k + ۲$ از نقطه $\frac{۱}{۳}$ برابر یک چهارم فاصله مورچه تا همین نقطه در مرحله $۲k$ است.

راه دوم:

در مراحل فرد مانند این است که تجانسی به مرکز A و نسبت $\frac{۱}{۲}$ و در مراحل فرد تجانسی به مرکز B و نسبت $\frac{۱}{۲}$ می‌زنیم.

این تجانس‌ها حرکات مورچه را مشخص می‌کنند. می‌دانیم ترکیب این دو تجانس، تجانس به نسبت $\frac{۱}{۴}$ می‌شود. حال کافی است مرکز آن را بیابیم. می‌دانیم که مرکز تجانس تنها نقطه‌ای است که در اثر تجانس ثابت می‌ماند. می‌توانید به سادگی نشان دهید که نقطه P ثابت می‌ماند لذا مرکز تجانس است. پس مانند بالا اثبات شد که در این دو مرحله فاصله مورچه تا نقطه P یک چهارم می‌شود. پس به طریق دوم نیز اثبات شد.
حال داریم که فاصله مورچه در ابتدا از نقطه P کمتر از طول AB است پس بعد از ۲۰ مرحله نیز فاصله آن از P کمتر از $\frac{AB}{۴^{۲۰}}$ می‌شود و به وضوح به همواره به وسط AB نزدیک‌تر خواهد بود.

۲۲- **گزینه [د] صحیح است.**

راه حل اول:

به وضوح فردی که در ابتدا، در انتهای صف حضور داشته باشد، تا ابد در آخر صف باقی خواهد ماند. توجه کنید که فردی که در حال حاضر نفر i صف است، پس از دستور فرمانده طبق تابع زیر جایگاهش در صف تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} ۱۲۸+\dfrac{i+۱}{۲} \\ \dfrac{i}{۲} \end{cases}$$

فردی که در نهایت پس از ۴۲ مرتبه دستور فرمانده در ابتدای صف قرار می‌گیرد را علی‌اکبر بنامید. به وضوح علی‌اکبر در مرحله قبل نفر دوم، در مرحله قبل آن نفر چهارم و... بوده است. به همین ترتیب می‌توان گفت که علی‌اکبر پس از ۳۴ دستور فرمانده، نفر ۲۵۶ صف بوده است. در مرحله قبل از این به راحتی می‌توان بررسی کرد که نفر ۲۵۵ صف بوده است. توجه کنید که $(۱۱۱۱۱۱۱۱)_۲=۲۵۵$. در مرحله قبل از این علی‌اکبر در جایگاه ۲۵۳ حضور داشت که $(۱۱۱۱۱۱۰۱)_۲=۲۵۳$. به همین ترتیب اگر ادامه دهیم، هر مرحله که به عقب بازگردیم، دومین یک از سمت راست (در مبنای۲) تبدیل به صفر خواهد شد. پس می‌توان نتیجه گرفت که بعد از ۲۶ دستور، علی‌اکبر در ابتدای صف حضور داشته باشد. با تکرار این روند باز می‌توان نتیجه گرفت که بعد از دستور دهم نیز علی‌اکبر درجایگاه اول قرار داشته و بعد از دستور دوم درجایگاه ۲۵۶. پس بعد از دستور اول در جایگاه ۲۵۵ قرار گرفته است. در نتیجه در اول کار علی‌اکبر در جایگاه ۲۵۳ صف بوده است.

راه حل دوم:

باز هم مانند علی‌اکبر راه همان سربازی که در مرحله ۴۲ در ابتدای صف قرار می‌گیرد بنامید. اگر a_i مکان یکی از سربازها مثلاً علی‌اکبر در مرحله i ام باشد به سادگی می‌توان نشان داد که (به پیمانه ۲۵۷) $a_i\equiv ۲a_{i+۱}$

پس بعد از ۴۲ مرحله داریم که (به پیمانه ۲۵۷) $a_۱\equiv ۲^{۴۲}a_{۴۲}$ چون برای علی‌اکبر داریم $a_{۴۲}=۱$ پس داریم که:

(به پیمانه ۲۵۷) $a_۱\equiv ۲^{۴۲}\equiv ۲۵۶^۵\times ۴\equiv (-۱)^۵\times ۴\equiv ۲۵۳$

پس علی‌اکبر ابتدا در مکان ۲۵۳ بوده است.

۲۳- **گزینه [ب] صحیح است.**

چند جمله‌ای مورد نظر به فرم $a_۵x^۵+a_۴x^۴+\ldots+a_۰$ است که ضرایب جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند. اکنون می‌خواهیم این چندجمله‌ای بر $x^۲+x+۱$ بخش‌پذیر باشد. توجه کنید که: $x^۳-۱=(x^۲+x+۱)(x-۱)$. در نتیجه اگر چندجمله‌ای فوق بر $x^۲+x+۱$ بخش‌پذیر باشد پس چندجمله‌ای $(a_۵+a_۲)x^۲+(a_۴+a_۱)x(a_۳+a_۰)$ هم بر $x^۲+x+۱$ بخش‌پذیر است. اگر به جای عبارت حاصل باقی‌مانده‌ی آن را در $x^۲+x+۱$ قرار دهیم آنگاه این باقی‌مانده باید صفر باشد. این باقی‌مانده برابر است با: $(a_۴+a_۱-a_۵-a_۲)x+(a_۳+a_۰-a_۵-a_۲)$. صفر شدن این باقی‌مانده یعنی اینکه:

$$a_۰+a_۳=a_۱+a_۴=a_۲+a_۵=S$$

علاوه بر آن این اعداد جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند پس:

$$a_۰ + a_۱ + \dots + a_۶ = ۱ + ۲ + \dots + ۶ = ۲۱$$

در نتیجه باید $s = ۷$ باشد. حال برای شمردن تعداد این ۶ تایی‌ها بدین نحو عمل کنیم. ابتدا $a_۰$ را به دلخواه به ۶ حالت انتخاب می‌کنیم. از روی $a_۰$ مقدار $a_۳ = ۷ - a_۰$ به طور یکتا به دست می‌آید. بعد از آن از بین ۴ عدد باقی‌مانده $a_۱$ را به دلخواه تعیین می‌کنیم پس مشابه بالا $a_۴$ به طور یکتا معلوم می‌شود و در پایان از میان ۲ عدد باقی مانده به ۲ حالت $a_۲$ را انتخاب می‌کنیم و $a_۵$ به طور یکتا تعیین می شود. پس جواب مسئله برابر است با: $۲ \times ۴ \times ۶ = ۴۸$ و مسئله حل است.

۲۴- **گزینه [ج] صحیح است.**

توجه کنید که:

$$a^۳ - \frac{۱}{a^۳} \geq k(a - \frac{۱}{a}) \Rightarrow (a - \frac{۱}{a})(a^۲ + \frac{۱}{a^۲} + ۱) \geq k(a - \frac{۱}{a})$$

اما $a - \frac{۱}{a} > ۰$ پس با ساده کردن آن از طریق معلوم می‌شود که باید بزرگترین k حقیقی را بیابیم که برای هر a مثبت با شرط $a - \frac{۱}{a} \geq ۱$ داشته باشیم:

$$a^۲ + \frac{۱}{a^۲} + ۱ \geq k \Rightarrow (a - \frac{۱}{a})^۲ + ۳ \geq k$$

اکنون دقت کنید که اگر عدد مثبت a به نحوی باشد که $a - \frac{۱}{a} = ۱$ $(a = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲})$ دراین صورت در رابطه بالا به دست می‌آوریم که $۴ \geq k$. برای اینکه نشان دهیم ماکزیمم k و۴ است تنها کافی است نشان دهیم که برای هر a با شرط $a - \frac{۱}{a} \geq ۱$ داریم $(a - \frac{۱}{a})^۲ + ۳ \geq ۴$ که این هم بدیهی است. پس برای ۴ هم اثبات ارائه کردیم و هم مثالی ارائه کردیم که نشان دهیم از این عدد بزرگتر نمی‌توان یافت. در نتیجه گزینه

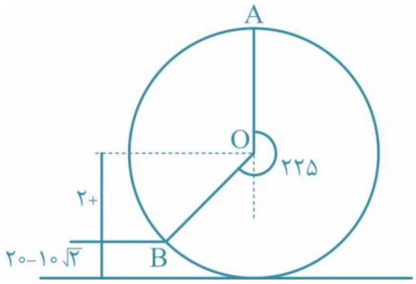
• توجه: نکته‌ای که باید به آن توجه کنید این است که هنگامی که به رابطه $a^۲ + \frac{۱}{a^۲} + ۱ \geq k$ می‌رسید اگر از نامساوی حسابی ـ هندسی بهره ببرید به این نتیجه می‌رسید که $a^۲ + \frac{۱}{a^۲} + ۱ \geq ۳$ پس احتمالاً حدس می‌زنید که شاید بهترین k همان ۳ باشد. البته این که در تست جواب ۳ وجود ندارد به شما کمک می‌کند تا احساس کنید در قسمتی اشتباه کرده‌اید. اما اگر درگزینه‌ها عدد ۳ وجود داشت توجه به این نکته که شما از فرض $a - \frac{۱}{a} \geq ۱$ هیچ استفاده‌ای $۲۰ - (۲۰ - ۱۰\sqrt{۲}) = ۱۰\sqrt{۲}$ نکرده‌اید می‌توانست راهنمای شما برای پیدا کردن خطا باشد.

۲۵- **گزینه [هـ] صحیح است.**

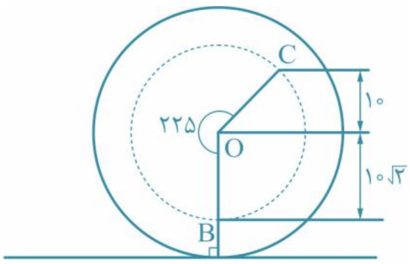
محیط دایره عظیمه توپ برابر است با ۴۰π و توپ ۲۵π حرکت کرده است. پس در کل به اندازه $\frac{۵}{۸} = \frac{۲۵\pi}{۴۰\pi}$ دور یا ۲۲۵ چرخیده است.

لذا با توجه به اینکه نقطه علامت خورده خود یک دایره عظیمه را می‌پیماید ارتفاع علامت خورده پس از حرکت به سمت شرق برابر $۲۰ + ۲۰\cos(۲۲۵\square) = ۲۰ - ۱۰\sqrt{۲}$ می‌شود. از اینجا به بعد در حرکت به سمت شمال هم توپ مقدار ۲۲۵ می‌چرخد ولی نقطه علامت خورده روی دایره‌ای ثابت حرکت می‌کند، که شعاع آن برابر است و در ابتدا نقطه مورد نظر در پایین دایره قرار دارد. با چرخش به مقدار ۲۲۵

دیگر نقطه به ارتفاع $۲۰ - ۱۰\sqrt{۲}\cos(۲۲۵\square)$ یا ۳۰ سانتی‌متر می‌رسد. در اشکال زیر نمای جانبی کره را در هر یک از این حرکات می‌بینید.



A محل نقطه پیش از حرکت به سمت شرق و B مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت



A محل نقطه پیش از حرکت به سمت شرق و B مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت

۲۶- گزینه [ج] صحیح است.

در شکل زیر دو کاشی روی جدول قرار گرفته است. با توجه به این که باید مجموع اعداد روی کاشی بر ۶ بخش‌پذیر باشد، لزوماً $A_۴$ و $A_۲$ باید برابر باشند(چرا؟). به کمک این استدلال می‌توان گفت که اعداد نوشته شده در دو خانه‌ای که فاصله عمودی یا افقی آن‌ها ۲ است، برابر است.

A..	B..	A..	B..
C..	D..	C..	D..
A..	B..	A..	B..
C..	D..	C..	D..

به عبارتی اگر سطرها و ستون‌ها را از چپ به راست و از بالا به پایین از ۱ تا ۱۳۸۸ شماره‌گذاری کنیم، خانه‌های با سطر فرد و ستون فرد با هم برابر هستند و این مقدار را A فرض کنید. به همین ترتیب کلیه خانه‌های (فرد، زوج) برابر C، تمام خانه‌های (زوج، فرد) برابر B و تمام خانه های (زوج، زوج) برابر D هستند. همچنین با کاشی‌گذاری‌ها، می‌توان ثابت کرد که

$$۲B \equiv ۲C \pmod{۶} \Rightarrow B \equiv C \pmod{۳}$$
$$۲A \equiv ۲D \pmod{۶} \Rightarrow A \equiv D \pmod{۳}$$
$$۶ \mid ۲B + A + D \Rightarrow ۲ \mid A + D \Rightarrow A \equiv D \pmod{۲}$$
$$۶ \mid ۲D + B + C \Rightarrow ۲ \mid B + C \Rightarrow B \equiv C \pmod{۲}$$

از روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت که B=C و A=D. در نتیجه کافی است که

$$۶ \mid ۲(A + B) \Rightarrow ۳ \mid A + B$$

حال A می‌تواند به ۶ حالت انتخاب شود و B متناظر با آن در ۲ حالت می‌شود. پس جواب $۱۲ = ۲ \times ۶$ است.

۲۷- **گزینه [ج] صحیح است.**

فرض کنید که B_n و A_n عبارتی باشند از در آنها از n تا ۲ و n تا ۴ استفاده شده باشد و C_n عبارتی باشد که در آن از ۴n تا ۲ استفاده شده باشد:

$$A_n = ۲^{۴^{۲^{\cdots ۴}}} \qquad B_n = ۴^{۲^{۴^{\cdots ۲}}} \qquad C_n = ۲^{۲^{۲^{\cdots ۲}}}$$

اکنون هدف ما نشان داد نامساوی $C_n > A_n > B_n$ برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ است. اگر این نامساوی را نشان دهیم از قرار دادن n=۵۰۰ جواب به دست می‌آید. این حکم را به روش استقرایی نشان می‌دهیم. به راحتی می‌توان این نامساوی را برای حالت پایه یعنی n=۲ چک کرد. اگر نامساوی برای n درست باشد برای n+۱ می‌توان نوشت:

$$A_{n+۱} = ۲^{۴^{A_n}} = ۲^{۲^{۲A_n}} \qquad B_{n+۱} = ۴^{۲^{B_n}} = ۲^{۲^{B_{n+۱}}} \quad C_{n+۱} = ۲^{۲^{۲^{C_n}}}$$

اکنون اگر دقت کنید $۲A_n > ۲B_n > B_n + ۱$ در نتیجه $۲^{۲^{۲A_n}} > ۲^{۲^{B_n+۱}}$ یا معادله: $A_{n+۱} > B_{n+۱}$.

اکنون می‌خواهیم $C_{n+۱}, \mathrm{A}_{n+۱}$ را با هم مقایسه کنیم. ثابت می‌کنیم که $۲^{۲^{C_n}} > ۲A_n$ و از آن حکم را نتیجه می‌گیریم. توجه کنید که اگر u عددی طبیعی باشد $۲^{۲^u} > ۲u$ صحیح است. در نتیجه:

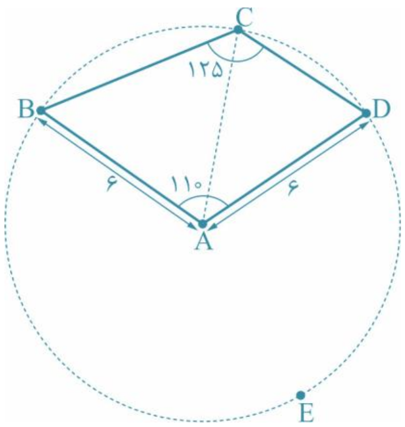
$$۲^{۲^{C_n}} > ۲C_n > ۲A_n \Rightarrow ۲^{۲^{۲^{C_n}}} > ۲^{۲^{۲A_n}}$$

که از آن نتیجه می‌شود: $C_{n+۱} > A_{n+۱}$.

در نتیجه چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم باستقرار ثابت شد. پس برای n=۵۰۰ داریم:

C>A>B و در نتیجه گزینه (ج) صحیح است.

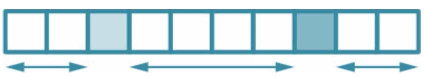
۲۸- **گزینه [ج] صحیح است.**



دایره به مرکز A و شعاع ۶ را اضافه می‌کنیم. (مطابق شکل) واضح است که B و D روی این دایره قرار دارند. نشان می‌دهیم که C هم روی این دایره قرار دارد. داریم که کمان BED برابر $۲۵۰□ = ۱۱۰□ - ۳۶۰□$ است و زاویه BCD هم برابر $\frac{۲۵۰□}{۲} = ۱۲۵□$ است. لذا BED کمان درخور زاویه BCD است و C روی دایره قرار دارد. پس AC=۶.

۲۹- **گزینه [ب] صحیح است.**

در هر حرکت ما قطعه جورچین را در یکی از سه ناحیه چپ، وسط و راست قرار می‌دهیم.



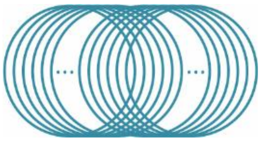
در اول تعداد روش‌های چیدن قطعات در ناحیه وسط را می‌شماریم. در ۳ مرحله ممکن است قطعات را از سمت چپ پیشروی دهیم یا از سمت راست(مثلاً در مرحله اول ما می‌توانیم یک قطعه مجاور خانه قرمز قرار دهیم یا یک قطعه مجاور خانه آبی). قطعه آخر هم به صورت یکتا قرار خواهد گرفت. پس به ۸ طریق می‌توان ۴ خانه وسط را پر نمود. حال نوبت به چیدن قطعات ناحیه چپ است. دراین جا دو قطعه باید قرار بگیرند که لزوماً قطعه خانه ۲ زودتر از قطعه خانه ۱ پر می‌شود. در نتیجه برای ترکیب کردن چیدمان ناحیه چپ و وسط کافی است تعداد راه های قرار دادن دو حرکت بین ۴ حرکت خانه‌های وسط را شمارد. این هم بدین ترتیب است که ما می‌توانیم یکی از ۵ جایگاه ممکن برای قرار دادن این حرکات را به هر دو اختصاص دهیم یا دو محل مختلف اختصاص دهیم که در کل به ۱۵ طریق می‌توان حرکات ناحیه چپ را بین

حرکات ناحیه وسط انجام داد. حال حرکات ناحیه راست را می‌خواهیم در بین ۶ حرکت نواحی چپ و وسط انجام دهیم. با استدلالی مشابه دو حرکت ناحیه راست را به ۲۸ طریق می‌توان دو حرکت را جاسازی کرد $\left(\binom{۷}{۲}+۷\right)$. پس در کل به $۸ \times ۱۵ \times ۲۸ = ۳۳۶۰$ طریق می‌توان جورچین را چید.

توجه کنید که در این سوال از تکنیک ادغام حرکات استفاده شده بود. یعنی ما حرکات لازم برای انجام کارهای مختلف را به طور مناسبی در هم می‌آمیزیم. به همین منظور مسئله را به سه حالت تقسیم کرده و سپس آن‌ها را در هم آمیختیم.

۳۰- **گزینه [هـ] صحیح است.**

دقت کنید که اگر شرط هم صفحه بودن وجود نداشت می‌توانستیم بی‌نهایت دایره را با الگوی شکل زیر روی یک صفحه قرار دهیم:



حال مناسب است با همان الگوی بالا بی‌نهایت دایره را روی یک کره بچینیم. به وضوح هر سه شرط مسأله را برآورده کرده‌ایم.